

การศึกษาผลกระทบทางธุรกิจของ  
การใช้ตัวแบบการจองเกินที่ผิดสมมุติฐานทางสถิติ

The Business effect of Misspecification in Overbooking Models

ปฏิภาณ แซ่หลิม<sup>1</sup> และ กาญจน์ภา อมรัชกุล<sup>2</sup>

<sup>1</sup>คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

118 ถ. เจริญไทย แขวงคลองจั่น เขตบางกะปิ กรุงเทพฯ 10240 โทรศัพท์ : 0-23775381 E-mail: yoyo\_nong@hotmail.com

<sup>2</sup>คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

118 ถ. เจริญไทย แขวงคลองจั่น เขตบางกะปิ กรุงเทพฯ 10240 โทรศัพท์ : 0-23775381 E-mail kamaruchkul@gmail.com

บทคัดย่อ

ผู้วิจัยศึกษาตัวแบบการจองเกินแบบสถิติ จากมุมมองทางสถิติหากผู้จองมีอิสระต่อการมาแสดงตนและความน่าจะเป็นในการมาแสดงตนเท่ากัน จำนวนผู้จองที่มาแสดงตนควรเป็นตัวแทนสุ่มที่มีการแจกแจงทวินาม อย่างไรก็ตามงานวิจัยบางส่วนรวมทั้งการปฏิบัติงานจริงของสายการบินมักสมมุติให้จำนวนผู้จองที่มาแสดงตนเป็นผลคูณระหว่างระดับการจองเกินกับอัตราการมาแสดงตน นั่นคือสายการบินใช้ตัวแบบการจองเกินที่ผิดสมมุติฐานทางสถิติ งานวิจัยชิ้นนี้ศึกษาผลกระทบดังกล่าว จากผลการทดลองสรุปได้ว่าตัวแบบการจองเกินที่ผิดสมมุติฐานทางสถิติจะมีประสิทธิภาพลดลงเมื่อความน่าจะเป็นในการมาแสดงตนของผู้จองลดลง ทั้งนี้ผู้วิจัยได้แบ่งตัวแบบที่ผิดสมมุติฐานทางสถิติแยกตามการแจกแจงของอัตราการมาแสดงตนเป็นสามการแจกแจง สรุปได้ว่า ตัวแบบการจองเกินที่มีอัตราการมาแสดงตนแจกแจงเบต้ามาตรฐานมีประสิทธิภาพดีที่สุด สำหรับตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจงอื่น ประสิทธิภาพของตัวแบบขึ้นกับค่าใช้จ่ายจากการจองเกิน กล่าวคือหากค่าใช้จ่ายในกรณีที่มีความจุเหลือเท่ากับค่าใช้จ่ายเมื่อมีผู้จองมาเกินความจุแล้วตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตราการมาแสดงตนแจกแจงเชิงกำหนดจะมีประสิทธิภาพเทียบเท่ากับตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตราการมาแสดงตนแจกแจงปกติ แต่ประสิทธิภาพของตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตราการมาแสดงตนแจกแจงปกติจะมีประสิทธิภาพการทำงานที่ดีกว่าตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตราการมาแสดงตนแจกแจงเชิงกำหนด หากค่าใช้จ่ายในกรณีที่มีความจุเหลือไม่เท่ากับค่าใช้จ่ายเมื่อมีผู้จองมาเกินความจุ

คำสำคัญ: การจัดการรายได้; การประยุกต์ใช้ตัวแบบสโตแคสติก;

การวิจัยดำเนินการ

Abstract

We study static overbooking models. Suppose that each reservation shows up independently, and that the probability of

showing up is identically among all reservation. Then, the random show demand follows the binomial distribution. However, some overbooking modules actually implemented in practice assume that the show demand is the product of the overbooking level and the random show-up rate. The decision model the airlines employ is misspecified. In this article, we explore the consequences of the modeling error. Through numerical experiments, we find that the performance of the model with misspecification decreases as the show-up probability decreases. Among our three choices of show-up rate distributions, the beta model performs best. When spoilage cost is equal to oversale cost, the performances of both deterministic and normal models are approximately the same. The normal show-up model performs better than the deterministic model, when spoilage cost is unequal to oversale cost.

Keywords: Revenue Management; Stochastic Model Applications; Operations Research

1. บทนำ

สายการบินนำกลยุทธ์การจองเกินมาใช้เพื่อลดความเสี่ยงของผู้จองที่นั่ง [5] ความเสี่ยงดังกล่าวประกอบด้วย การยกเลิกตั๋วที่จองไว้ (Cancellation) การไม่มาแสดงตัวเลย (No-Show) หรือมาไม่ครบกับจำนวนที่จองไว้ก่อนหน้า (Variable Tendering) เหตุการณ์เหล่านี้ส่งผลให้สายการบินต้องให้ผู้โดยสารได้มีการจองเกินความจุที่มี ผู้ที่อยู่ในวงการธุรกิจสายการบินเปิดเผยว่าการนำกลยุทธ์การจองเกินมาใช้ทำให้ธุรกิจสายการบินมีรายได้เพิ่มขึ้นถึงหนึ่งพันล้านเหรียญดอลลาร์สหรัฐ [1] สายการบินต้องการทราบว่าควรตั้งระดับการจองเกิน (Overbooking Limit) เป็นจำนวนเท่าไรเพื่อทำให้ค่าคาดหมายค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นมีค่าต่ำที่สุด ค่าใช้จ่ายขึ้นอยู่กับจำนวนผู้จองที่นั่งที่มาแสดงตน (Show Ups) รูปแบบของฟังก์ชันของจำนวนผู้

จองที่นั่งที่มาจากแสดงคนที่ต่างกันย่อมนำมาซึ่งค่าระดับการจองเกินที่ต่างกัน งานวิจัยกลุ่มหนึ่งรวมทั้งการปฏิบัติงานจริงของสายการบินพิจารณาจำนวนผู้จองที่นั่งที่มาจากแสดงคนเกิดจากผลคูณระหว่างอัตราการแสดงคนกับระดับการจองเกิน [5], [8] นั้นแสดงว่ารูปแบบนี้พิจารณาความสัมพันธ์ของระดับการจองเกินกับจำนวนผู้จองที่นั่งที่มาจากแสดงคนเป็นตามความสัมพันธ์เชิงเส้น แม้ว่ารูปแบบการพิจารณาจำนวนผู้จองที่นั่งที่มาจากแสดงคนแบบที่กล่าวข้างต้นจะนิยมใช้กันในทางปฏิบัติ ในทางสถิติจะเห็นว่าจำนวนผู้จองที่นั่งที่มาจากแสดงคนมีการแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution) และมีระดับการจองเกินเป็นพารามิเตอร์เมื่อจำนวนผู้จองที่มาจากแสดงคนเข้าเงื่อนไขต่อไปนี้คือ

- 1) ผู้จองมาแสดงคนอย่างเป็นอิสระต่อกัน
- 2) ผู้จองมาแสดงคนด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน

ทั้งนี้งานวิจัยของ Thompson (1961) พบว่าจำนวนผู้จองเหมาะสมตามการแจกแจงทวินาม ดังนั้นหากสมมติฐานการมาแสดงคนตรงตาม 2 ประการดังกล่าว รูปแบบการพิจารณาความสัมพันธ์ของระดับการจองเกินกับจำนวนผู้จองที่นั่งที่มาจากแสดงคนตามความสัมพันธ์เชิงเส้นนั้นผิดสมมติฐานทางสถิติ (Misspecification)

งานวิจัยด้านการใช้ตัวแบบที่ผิดสมมติฐานทางสถิติทางเศรษฐมิติพบได้อยู่ทั่วไป เช่น งานวิจัยของ Hausman (1978) ศึกษาการใช้ตัวแบบที่ผิดสมมติฐานทางเศรษฐมิติของสมการถดถอย ผลงานวิจัยพบว่าเกิดข้อผิดพลาดในการพยากรณ์ตัวแปรตาม แต่งานวิจัยเกี่ยวกับผลกระทบของตัวแบบที่ผิดสมมติฐานทางสถิติของการวิจัยดำเนินการ (Operations Research) มีอยู่น้อย เช่น Cooper (2006) ศึกษาผลกระทบของการใช้ตัวแบบที่ผิดสมมติฐานของพฤติกรรมลูกค้าสำหรับปัญหาการจัดการรายได้สำหรับเที่ยวบินที่มีผู้โดยสาร 2 ระดับชั้น (Two-Classes Revenue Management Problem) งานวิจัยของ Cooper ศึกษาผลกระทบจากการใช้ตัวแบบที่ผิดกับสมมติฐานด้านปัญหาการจัดการสรรพื้นที่ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับการจองเกิน แต่งานวิจัยชิ้นนี้ศึกษาถึงผลกระทบของการใช้ตัวแบบการจองเกินที่ผิดสมมติฐานทางสถิติ

ผู้วิจัยสร้างตัวแบบจองเกิน 2 ตัวแบบ คือ ตัวแบบเทียบสมรรถนะ (Benchmark model) เป็นตัวแบบที่ถูกตั้งตามหลักสมมติฐานทางสถิติ ตัวแบบนี้กำหนดให้จำนวนผู้จองที่นั่งที่มาจากแสดงตัวเป็นตัวแปรสุ่มทวินาม ตัวแบบที่ 2 คือ ตัวแบบเชิงเส้น (Linear model) ตัวแบบนี้กำหนดให้จำนวนผู้จองที่นั่งที่มาจากแสดงคนเป็นผลคูณระหว่างอัตราการมาแสดงคนกับระดับการจองเกิน ตัวแบบเชิงเส้นกำหนดให้อัตราการมาแสดงคนเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจง 3 แบบ คือ การแจกแจงเชิงกำหนด (Deterministic Distribution) การแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) [8] และการแจกแจงแบบเบต้ามาตรฐาน (Standard Beta Distribution) [6] ต่อจากนั้นจะทำการศึกษา

ผลกระทบด้วยการเปรียบเทียบค่าคาคหมายค่าใช้จ่ายของการจองเกินผ่านการทดลองเชิงตัวเลขต่อไป

## 2. วิธีการศึกษา

### 2.1 การสร้างตัวแบบการจองเกิน

ผู้วิจัยสร้างตัวแบบการจองเกินจากตัวแบบสถิต (Static Model) เพราะเป็นตัวแบบที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย [9] หาระดับการจองเกินภายใต้การทำให้ค่าคาคหมายค่าใช้จ่ายต่ำสุด ค่าใช้จ่ายจากการจองเกินประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนที่ 1 คือ ค่าใช้จ่ายกรณีที่จำนวนผู้จองที่นั่งมาแสดงตัวมากกว่าความจุบนเครื่องบิน เรียกค่าใช้จ่ายส่วนนี้ว่า ค่าใช้จ่ายส่วนเกิน (Oversale Cost) ส่วนที่ 2 คือค่าเสียโอกาสกรณีที่จำนวนผู้จองที่นั่งมาแสดงตัวน้อยกว่าความจุบนเครื่องบิน เรียกค่าใช้จ่ายส่วนนี้ว่าค่าใช้จ่ายส่วนขาด (Spoilage Cost)

กำหนดให้  $c$  แทน ความจุบนเครื่องบิน กำหนดเป็นค่าคงที่  $a_o$  แทน ค่าใช้จ่ายส่วนเกินต่อหน่วย  $a_s$  แทน ค่าใช้จ่ายส่วนขาดต่อหน่วย  $S(x)$  แทนจำนวนผู้จองที่นั่งที่มาจากแสดงตัวเมื่อ  $x$  แทน ระดับการจองเกิน และสัญลักษณ์  $[y]^+$  แทนจำนวนจริงที่มากที่สุดระหว่าง 0 กับ จำนวนจริง  $y$  ใดๆ ตัวแบบการจองเกินเชิงคณิตศาสตร์คือ

$$\min_x \{ \tilde{f}(x) = E[a_o[S(x) - c]^+ + a_s[c - S(x)]^+] \}$$

เทอมที่ 1 คือค่าใช้จ่ายส่วนเกินและเทอมที่ 2 คือค่าใช้จ่ายส่วนขาด สังเกตว่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์สามารถจัดรูปใหม่ได้ดังต่อไปนี้

$$\tilde{f}(x) = E[a_o S(x) + a_s c - (a_o + a_s) S(x) + (a_o + a_s)(S(x) - c)^+] ]$$

$$\text{ให้ } f(x) = (a_o + a_s) E[(S(x) - c)^+] - a_s E[S(x)]$$

$$\text{ดังนั้น } \tilde{f}(x) = f(x) + a_s c$$

ระดับการจองเกินที่ทำให้  $f(x)$  ต่ำสุดกับระดับการจองเกินที่ทำให้  $\tilde{f}(x)$  ต่ำสุดมีค่าเดียวกันเนื่องจาก  $a_s c$  เป็นค่าคงที่เมื่อทราบฟังก์ชันวัตถุประสงค์แล้ว ผู้วิจัยสร้างตัวแบบทั้ง 2 ดังนี้

#### 2.1.1 ตัวแบบเทียบสมรรถนะ

ให้  $S_0(x)$  แทนจำนวนผู้จองที่มาจากแสดงคนของตัวแบบเทียบสมรรถนะและมีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีพารามิเตอร์คือ  $x$  และ  $\theta$   $\theta$  แทนความน่าจะเป็นในการมาแสดงคน จะได้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของตัวแบบเทียบสมรรถนะดังนี้คือ

$$f_0(x) = (a_s + a_o)E[(S_0(x) - c)^+] - a_s E[S_0(x)] \\ = (a_s + a_o) \sum_{k=c}^x (k-c) \binom{x}{k} \theta^k (1-\theta)^{x-k} - a_s \theta x$$

ให้  $\mathcal{X}_0$  เป็นเซตของจำนวนนับ

**ประพจน์ที่ 1** ตัวแบบเทียบสมรรถนะมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์  $f_0(x)$  เป็นฟังก์ชันหงาย (Convex Function) สำหรับทุก  $x \in \mathcal{X}_0$  ระดับการจอบกั้นที่เหมาะสมที่สุด หาได้จาก  $x_0^* = \operatorname{argmax} \{x \in \mathcal{X}_0 : (a_s + a_o)P(S_0(x-1) \geq c) \leq a_s\}$  (1)

**พิสูจน์** จากหน้า 640-641 [9] ได้ว่า  $E[(S_0(x) - c)^+]$  เป็นฟังก์ชันหงาย พิจารณาเทอมที่ 2 ของ  $f_0(x)$  คือ  $E[S_0(x)] = \theta x$  เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งเป็นที่ฟังก์ชันหงายและคว่ำ (Concave Function) จาก  $a_s, a_o \geq 0$  ดังนั้นสรุปได้ว่า  $f_0(x)$  เป็นฟังก์ชันหงาย อ้างอิงจากหน้า 148 ของ [2] ระดับการจอบกั้นซึ่งทำให้  $f_0(x)$  มีค่าน้อยที่สุดคือ

$$x^* = \operatorname{argmax} \{x \in \mathcal{X}_0 : f_0(x) - f_0(x-1) \leq 0\}$$

โดย

$$f_0(x) - f_0(x-1) = (a_s + a_o) \{E[(S_0(x) - c)^+] - E[(S_0(x-1) - c)^+]\} - a_s \theta$$

และการพิสูจน์จะสิ้นสุดหากพิสูจน์ให้ได้ว่า

$$E[(S_0(x) - c)^+] - E[(S_0(x-1) - c)^+] = \theta P(S_0(x-1) \geq c)$$

ให้  $T = (S_0(x) - c)^+ - (S_0(x-1) - c)^+$  จาก

องค์ความรู้ทางสถิติลักษณะการแจกแจงของ  $S_0(x)$  จะเหมือนกับ

การแจกแจงของตัวแปรสุ่ม  $S_0(x-1) + A_1$  เมื่อ  $A_1$  มีการแจกแจง

แบบเบอร์นูลลี (Bernoulli Distribution) ซึ่ง  $E[A_1] = \theta$

และ  $S_0(x-1)$  กับ  $A_1$  เป็นอิสระต่อกันดังนั้น

$$E[T | S_0(x-1) = k] = \begin{cases} 0 & k < c \\ E[A_1] & k \geq c \end{cases}$$

$$E[E[T | S_0(x-1) = k]] = \sum_{k=0}^{x-1} E[T | S_0(x-1) = k] P(S_0(x-1) = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{c-1} E[T | S_0(x-1) = k] P(S_0(x-1) = k) + \sum_{k=c}^{x-1} E[T | S_0(x-1) = k] P(S_0(x-1) = k)$$

$$= \sum_{k=c}^{x-1} E[A_1] P(S_0(x-1) = k) = \theta P(S_0(x-1) \geq c)$$

## 2.1.2 ตัวแบบเชิงเส้น

จากความสัมพันธ์เชิงเส้นจะได้  $S(x) = xR_i$  โดยที่  $R_i$  แทนอัตราการผลิตของตัวแบบเชิงเส้นที่  $i$  โดยที่  $i = 1, 2, 3$  แทน ตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตราการผลิตแบบเชิงกำหนด แบบปกติ และแบบเบต้ามาตรฐาน ตามลำดับ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของตัวแบบเชิงเส้นที่  $i$  คือ

$$f_i(x) = (a_s + a_o)E[(xR_i - c)^+] - a_s E[xR_i]$$

### 2.1.2.1 ตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจงของอัตราการผลิตแสดงตนเชิงกำหนด

อัตราการผลิตแสดงตนของตัวแบบนี้แจกแจงเชิงกำหนด ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นคือ  $P(R_i = \rho) = 1$   $\rho$  แทน ค่าของอัตราการผลิตแสดงตนเชิงกำหนด (Deterministic Show-Up Rate)  $\rho$  มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

**ประพจน์ที่ 2** ตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจงของอัตราการผลิตแสดงตนเชิงกำหนด ค่าของระดับการจอบกั้นที่ทำให้

$$f_1(x) = \begin{cases} -a_s \rho x & \text{if } c \leq x \leq c/\rho \\ a_s \rho x - (a_s + a_o)c & \text{if } x > c/\rho \end{cases} \quad (2)$$

มีค่าต่ำที่สุดคือ  $x_1 = c/\rho$

**พิสูจน์** จากสมการด้านบนจะเห็นว่า  $f_1(x)$  ลดลงอย่างต่อเนื่องในช่วง  $(-\infty, c/\rho]$  และ  $f_1(x)$  จะเพิ่มขึ้นอย่าง

ต่อเนื่องในช่วง  $(c/\rho, \infty)$  ดังนั้น  $x_1 = c/\rho$  ทำให้  $f_1(x)$  มีค่าต่ำที่สุด ค่าระดับการจอบกั้นที่หาจาก  $c/\rho$  อาจเป็นทศนิยม

แต่ทางปฏิบัติค่าระดับการจอบกั้นที่สายการบินใช้ควรเป็นจำนวนเต็ม งานวิจัยนี้จึงกำหนดเกณฑ์การเลือกระดับการจอบกั้นดังนี้ คือ ค่าระดับการจอบกั้น

$$= \begin{cases} \lfloor c/\rho \rfloor & \text{if } f_1(\lfloor c/\rho \rfloor) < f_1(\lceil c/\rho \rceil) \\ \lceil c/\rho \rceil & \text{if } f_1(\lfloor c/\rho \rfloor) \geq f_1(\lceil c/\rho \rceil) \end{cases}$$

โดย  $\lfloor x \rfloor$  แทน จำนวนเต็มที่มีค่าที่น้อยที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับค่า  $x$

$\lceil x \rceil$  แทน จำนวนเต็มที่มีค่าที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับค่า  $x$

### 2.1.2.2 ตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจงของอัตราการผลิตแสดงตนแบบปกติและเบต้ามาตรฐาน

ค่าระดับการจอบกั้นขึ้นอยู่กับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability Density Function)

**ประพจน์ที่ 3** สำหรับตัวแบบเชิงเส้นที่  $i = 2, 3$  ฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์  $f_i(x)$  เป็นฟังก์ชันหงาย จุดต่ำสุด ( $\tilde{x}_i$ ) หาได้จากการแก้สมการ

$$\int_{\alpha_i}^{c/\tilde{x}_i} t g_i(t) dt = \frac{a_o}{(a_s + a_o)} E[R_i] \quad (3)$$

โดยที่  $\alpha_2 = -\infty$   $\alpha_3 = 0$  และ  $g_i$  แทนฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของอัตราการมาแสดงตนของตัวแบบที่  $i$

พิสูจน์ จากหน้า 640-641 ของ Talluri and vanRyzin (2004) เราสรุปได้ว่า  $E[(xR_i - c)^+]$  เป็นฟังก์ชันหงาย ส่วนที่เหลือของการพิสูจน์ว่า  $f_i(x)$  เป็นฟังก์ชันหงายอ้างอิงเหมือนกับการพิสูจน์ในประพจน์ที่ 1

เนื่องจากฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของตัวแบบเชิงเส้นที่  $i = 2, 3$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง การหาค่าระดับการจองเงินที่เหมาะสมที่สุดทำได้โดยการหาอนุพันธ์อันดับที่ 1 และจัดให้เท่ากับ 0 ดังนี้ ให้  $\beta_2 = \infty$   $\beta_3 = 1$

$$\frac{d}{dx} f_i(x) = \frac{d}{dx} \left[ (a_s + a_o) \int_{c/x}^{\beta_i} (rx - c) g_i(r) dr - a_s E[xR_i] \right] = 0$$

$$= (a_s + a_o) \int_{c/x}^{\beta_i} r g_i(r) dr - a_s E[R_i] \quad (4)$$

$$= (a_s + a_o) \left[ E[R_i] - \int_{c/x}^{c/x} r g_i(r) dr \right] - a_s E[R_i] \quad (5)$$

สมการที่ (4) ได้จาก Leibniz' rule และ (5) ได้จากสูตร

$$E[R_i] = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} r g_i(r) dr \quad \text{และสมการที่ (3) ได้จากการจัดรูป}$$

สมการ (5) ให้เท่ากับศูนย์

ค่าของระดับการจองเงินที่หามาจากสมการที่ (3) อาจเป็นทศนิยม งานวิจัยนี้ใช้เกณฑ์การเลือกระดับการจองเงินตามหัวข้อ 2.1.2.1

## 2.2 กระบวนการทำซ้ำ

กระบวนการทำซ้ำของงานวิจัยนี้ปฏิบัติเหมือนกับระบบการจัดการรายได้ของสายการบิน กล่าวคือ กระบวนการทำซ้ำประกอบด้วย กระบวนการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization Process) กระบวนการเก็บข้อมูล (Data Collection Process) และกระบวนการพยากรณ์ (Forecasting Process) หลังจากผ่านขั้นตอนการพยากรณ์ ระบบจะวนกลับไปขั้นตอนการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดตามด้วยการเก็บข้อมูล อย่างนี้จนสิ้นสุดช่วงเวลาที่กำหนด

ให้  $\rho_t$  แทนอัตราการมาแสดงตนของตัวแบบเชิงเส้นแบบเชิงกำหนดที่เวลา  $t$  ( $\mu_t, \sigma_t^2$ ) แทนพารามิเตอร์ของการแจกแจงปกติที่เวลา  $t$  ( $a_t, b_t$ ) แทนพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบต้ามาตรฐานที่เวลา  $t$

$$\text{ให้ } y_{1t} = \rho_t, y_{2t} = (\mu_t, \sigma_t^2), y_{3t} = (a_t, b_t)$$

### 2.2.1 กระบวนการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด

คือขั้นตอนของการหาระดับการจองเงิน ระดับการจองเงินของตัวแบบเชิงเส้นที่  $i$  แทนด้วย  $x_i(y_{it})$  หากกประพจน์ที่ 2 และ 3 ตามลำดับ หลังจากได้ระดับการจองเงินแล้วจะนำระดับการจองเงินดังกล่าวไปหาค่าคาดหมายค่าใช้จ่ายนั้นคือ หา

$$f_0[(x_i(y_{it}))]$$

### 2.2.2 กระบวนการเก็บข้อมูล

กำหนดให้สายการบินพยากรณ์ระดับการจองเงิน ทุกๆ  $m$  เที่ยวบิน

ให้  $\{s_{ijt} : j = 1, \dots, m\}$  แทนจำนวนผู้จองที่มาแสดงตนของตัวแบบเชิงเส้นที่  $i$  ในเที่ยวบินที่  $j$  ที่เวลา  $t$

$\{r_{ijt} : j = 1, \dots, m\}$  แทนอัตราการมาแสดงตนของตัวแบบเชิงเส้นที่  $i$  ในเที่ยวบินที่  $j$  ที่เวลา  $t$   $x_{it}$  แทนระดับจองเงินของตัวแบบเชิงเส้นที่  $i$  ที่เวลา  $t$  งานวิจัยนี้สร้าง  $s_{ijt}$  ด้วยวิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation) ของการแจกแจงทวินาม โดยใช้พารามิเตอร์  $x_{it}$  และ  $\theta$  อัตราการมาแสดงตนหาก

$$r_{ijt} = \frac{s_{ijt}}{x_{it}}$$

### 2.2.3 กระบวนการพยากรณ์

สายการบินจะต้องพยากรณ์ค่าพารามิเตอร์ของอัตราการมาแสดงตนเพื่อนำมาหาระดับการจองเงินในช่วงเวลาต่อมา เนื่องจากการประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นให้ความสำคัญทั้งข้อมูลในอดีตและปัจจุบัน เทคนิคการพยากรณ์อัตราการมาแสดงตนที่ผู้วิจัยเลือกใช้คือ เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential Smoothing Technique) ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายและนิยมใช้ในทางปฏิบัติ (Makridakis et al. (1998))

ดังนั้น ค่าพารามิเตอร์ในช่วงเวลาต่อมาคือ  $y_{i,t+1} = \gamma_i \hat{r}_{it} + (1 - \gamma_i) y_{it}$   $\gamma_i$  แทนค่าถ่วงน้ำหนักของตัวแบบเชิงเส้นที่  $i$  มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 และ  $\hat{r}_{it}$  ได้จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimates, MLE) ของ  $r_{ijt}$

## 3. ผลการทดลองเชิงตัวเลข

ข้อมูลสำหรับการทดลองเชิงคณิตศาสตร์ได้มาจากบริษัทสายการบินหลักแห่งหนึ่งในประเทศ เป็นข้อมูลของเที่ยวบินเที่ยวเดียว (Single Leg Flight) ให้  $m = 30$  ในกระบวนการทำซ้ำ กำหนดให้ช่วงเวลาการตัดสินใจ (decision period) เท่ากับ 400 และ

ผู้วิจัยกำหนดจำนวนการทำซ้ำเป็น 300 ครั้ง (จำนวนการทำซ้ำดังกล่าว ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.5% เมื่อเทียบกับค่าคาดหวังค่าใช้จ่าย)

ค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นของตัวแบบเชิงเส้นของแต่ละการ แจกแจงเป็นดังนี้คือ  $\rho_1 = 0.95$  ( $\mu_1, \sigma_1^2$ ) = (0.95, 0.03) และ  $(a_1, b_1) = (62.33, 3.86)$  งานวิจัยนี้สร้างแผนการทดลองขึ้นมา 9 แผน (3\*3 factorial) เกิดจากการปรับเปลี่ยน  $(a_s, a_o)$  และ  $\theta$  ดังนี้

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์ทั้ง 9 แผนการทดลอง

$\theta \setminus (a_s, a_o)$	(4800, 4800)	(4800, 9600)	(9600, 4800)
0.8	Ex.1	Ex.2	Ex.3
0.5	Ex.4	Ex.5	Ex.5
0.3	Ex.7	Ex.8	Ex.9

ตารางที่ 2 ตารางสรุปผลการประเมินประสิทธิภาพของแผนการทดลองที่ 1 ถึง 3

แผนการทดลอง	1	2	3
<b>ตัวแบบเทียบสมรรถนะ</b>			
Mean	31,456.0	42,542.3	43,458.6
<b>ตัวแบบเชิงเส้นที่อัตราการมาแสดงตนแจกแจงเชิงกำหนด</b>			
Mean	32,577.5	47,877.6	49,049.9
%dif	3.6	12.5	12.9
SE	35.0	32.4	73.2
<b>ตัวแบบเชิงเส้นที่อัตราการมาแสดงตนแจกแจงแบบปกติ</b>			
Mean	32,598.6	43,879.9	45,449.5
%dif	3.6	3.1	4.6
SE	34.9	36.5	65.6
<b>ตัวแบบเชิงเส้นที่อัตราการมาแสดงตนแจกแจงเบต้ามาตรฐาน</b>			
Mean	32,252.0	43,502.3	44,810.5
%dif	2.5	2.3	3.1
SE	31.8	32.5	60.7

ตารางที่ 3 ตารางสรุปผลการประเมินประสิทธิภาพของแผนการทดลองที่ 4 ถึง 6

แผนการทดลอง	4	5	6
<b>ตัวแบบเทียบสมรรถนะ</b>			
Mean	49,769.6	67,473.2	68,595.1
<b>ตัวแบบเชิงเส้นที่อัตราการมาแสดงตนแจกแจงเชิงกำหนด</b>			
Mean	53,986.8	78,414.3	82,946.1
%dif	8.5	16.2	20.9
SE	127.4	121.6	261.1
<b>ตัวแบบเชิงเส้นที่อัตราการมาแสดงตนแจกแจงแบบปกติ</b>			
Mean	53,989.9	71,840.8	76,698.9
%dif	8.5	6.5	11.8
SE	127.5	127.1	253.9
<b>ตัวแบบเชิงเส้นที่อัตราการมาแสดงตนแจกแจงเบต้ามาตรฐาน</b>			
Mean	52,264.6	70,063.2	73,493.6
%dif	5.0	3.8	7.1
SE	105.5	103.8	212.3

ตารางที่ 4 ตารางสรุปผลการประเมินประสิทธิภาพของแผนการทดลองที่ 7 ถึง 9

แผนการทดลอง	7	8	9
<b>ตัวแบบเทียบสมรรถนะ</b>			
Mean	58,884.4	79,863.3	81,140.6
<b>ตัวแบบเชิงเส้นที่อัตราการมาแสดงตนแจกแจงเชิงกำหนด</b>			
Mean	66,244.9	95,203.0	103,342.7
%dif	12.5	19.2	27.4
SE	206.1	198.8	421.4
<b>ตัวแบบเชิงเส้นที่อัตราการมาแสดงตนแจกแจงแบบปกติ</b>			
Mean	66,270.6	87,461.9	95,679.5
%dif	12.5	9.5	17.9
SE	206.5	205.2	415.0
<b>ตัวแบบเชิงเส้นที่อัตราการมาแสดงตนแจกแจงเบต้ามาตรฐาน</b>			
Mean	62,749.0	84,047.1	88,700.2
%dif	6.6	5.2	9.3
SE	158.8	158.2	319.1

อธิบายผลจากตารางที่ 2-4 ได้ดังนี้

### 3.1 ประเด็นผลกระทบทางธุรกิจของการใช้ตัวแบบเชิงเส้น

% dif แสดงร้อยละความแตกต่างระหว่างค่าคาดหมาย ค่าใช้จ่ายของตัวแบบทั้งเชิงเส้นและค่าคาดหมายของตัวแบบเทียบ สมรรถนะ จากตารางจะเห็นว่า % dif ของตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจงเบต้ามาตรฐานมี % dif น้อยที่สุด คืออยู่ในช่วงระหว่างร้อยละ 2 ถึง 9 การที่ % dif มีค่าน้อยแสดงว่า การใช้ตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจงของอัตรากรรมาแสดงคนแบบเบต้า นั้นมีประสิทธิภาพดีที่สุดหากเทียบกับการแจกแจงอื่นๆ แม้ว่าตัวแบบเชิงเส้นจะเป็นตัวแบบที่ผิดสมมุติฐานทางสถิติ หากผู้จงบมาแสดงคนอย่างเป็นทางการและมีความน่าจะเป็นในการมาแสดงคนเท่ากัน แต่อย่างไรก็ตามค่า % dif ของตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจงของอัตรากรรมาแสดงคนแบบเบต้า นั้นอยู่ในช่วงที่พอรับได้ในทางปฏิบัติการของสายการบิน ดังนั้นตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจงแบบเบต้ามาตรฐานนั้นมีความแกร่ง นั่นเอง (Robustness)

### 3.2 ผลกระทบทางธุรกิจของการใช้ตัวแบบเชิงเส้นต่อความน่าจะเป็นในการมาแสดงคน

แผนการทดลองที่ 1 ถึง 3 มีค่าความน่าจะเป็นในการมาแสดงคนเท่ากับ 0.8 % Dif ของตัวแบบเชิงเส้นทั้ง 3 การแจกแจงประมาณร้อยละ 2 ถึง 13 แผนการทดลองที่ 4 ถึง 6 มีค่าความน่าจะเป็นที่จะมาแสดงคนเท่ากับ 0.5 % Dif ของตัวแบบเชิงเส้นทั้ง 3 การแจกแจงประมาณร้อยละ 4 ถึง 21 และแผนการทดลองที่ 7 ถึง 9 มีค่าความน่าจะเป็นที่จะมาแสดงคนเท่ากับ 0.3 % Dif ของตัวแบบเชิงเส้นทั้ง 3 การแจกแจงประมาณร้อยละ 5 ถึง 27 จะเห็นว่าเมื่อค่าความน่าจะเป็นที่จะมาแสดงคนลดลง ค่า % Dif จะเพิ่มขึ้น นั่นแสดงให้เห็นว่าเมื่อความน่าจะเป็นที่จะมาแสดงคนลดลง ค่าคาดหมาย ค่าใช้จ่ายของตัวแบบเชิงเส้นนั้นสูงกว่าค่าคาดหมายค่าใช้จ่ายของตัวแบบเทียบสมรรถนะมากขึ้น ดังนั้นความแม่นยำของตัวแบบเชิงเส้นซึ่งผิดสมมุติฐานทางสถิติจะลดลงเมื่อค่าความน่าจะเป็นในการมาแสดงคนของผู้จงบลดลงนั่นเอง

### 3.3 ผลกระทบทางธุรกิจของการใช้ตัวแบบเชิงเส้นต่อค่าใช้จ่ายจากการจองเกิน

ตัวแบบการจองเกินแบบเชิงเส้นเป็นตัวแบบที่ผิดสมมุติฐานทางสถิติ ผู้วิจัยแยกอัตรากรรมาแสดงคนของตัวแบบเชิงเส้นออกเป็นสามการแจกแจง สรุปได้ว่าตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแบบเบต้ามาตรฐานมีประสิทธิภาพดีที่สุดหรือมีความแกร่งที่สุดเมื่อเทียบกับตัวแบบเชิงเส้นที่เหลือ

จากภาพรวมจะเห็นว่าตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแบบปกติ นั้นมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแบบเชิงกำหนด นั่นคือ % Dif ทั้งหมด 6 แผนการทดลองของตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแจกแจงแบบปกติ นั้นน้อยกว่าตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแจกแจงเชิงกำหนด ยกเว้นแผนการทดลองที่ 1 4 และ 7 ที่ % Dif ของตัวแบบทั้ง 2 เท่ากัน

แผนการทดลองที่ 1 4 และ 7 นั้น มีค่าใช้จ่ายจากการจองเกินดังนี้คือ  $(a_s, a_o) = (4,800, 4,800)$  ดังนั้นแสดงว่าหากค่าใช้จ่ายในกรณีที่มีความจุเหลือเท่ากับค่าจ่ายในกรณีที่ผู้จงบมาแสดงคนเกินความจุแล้วตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแบบเชิงกำหนดมีประสิทธิภาพในการหาระดับการจองเกินเท่ากับตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแจกแจงแบบปกติ เหตุผลดังกล่าวสามารถอธิบายได้ด้วยประพจน์ที่ใช้ในการหาระดับการจองเกิน กล่าวคือ การหาระดับการจองเกินของตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแบบเชิงกำหนดในประพจน์ที่ 2 นั้นไม่ได้ใช้ค่าใช้จ่ายจากการจองเกินแต่อย่างใด ในขณะที่การหาระดับการจองเกินของตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแบบปกติในประพจน์ที่ 3 นั้นมีการใช้ค่าใช้จ่ายจากการจองเกิน การหาค่าคาดหมายค่าใช้จ่ายของตัวแบบเชิงเส้น หากจงบการวนการทำซ้ำซึ่งจะทำการปรับ (Update) ค่าพารามิเตอร์ ดังนั้นตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจงเชิงกำหนดจะปรับเพียงแค่พารามิเตอร์ของอัตรากรรมาแสดงคนเพียงอย่างเดียว ในขณะที่ตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแบบปกติ นั้นจะปรับทั้งอัตรากรรมาแสดงคนและค่าใช้จ่าย ดังนั้นในแผนการทดลองอื่นๆ ที่ค่าใช้จ่ายในกรณีที่มีความจุเหลือไม่เท่ากับค่าจ่ายในกรณีที่ผู้จงบมาแสดงคนเกิน ความจุในตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตรากรรมาแสดงคนแจกแจงปกติจึงมีประสิทธิภาพที่ดีกว่า

## 4 สรุปและข้อเสนอแนะ

### 4.1 สรุปผล

ระดับการจองเกินขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของจำนวนผู้จงบที่นั่งที่ มาแสดงคน งานวิจัยกลุ่มหนึ่งพิจารณาฟังก์ชันของจำนวนผู้จงบที่นั่งที่ มาแสดงคนตามความสัมพันธ์เชิงเส้นของระดับการจองเกินกับอัตรากรรมาแสดงคน  $(S(x) = xR)$  ซึ่งรูปแบบนี้ผิดหลักทางสถิติเนื่องจากหากอัตรากรรมาแสดงคนของผู้โดยสารแต่ละคนเป็นอิสระต่อกันด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ  $\theta$  แล้ว จำนวนผู้จงบที่นั่งที่ มาแสดงคนควรมีการแจกแจงทวินาม

จากการเปรียบเทียบค่าคาดหมายค่าใช้จ่ายในการหาระดับการจองเกินระหว่างตัวแบบเทียบสมรรถนะกับตัวแบบเชิงเส้นทั้ง 9 แผนการทดลอง พบว่าการใช้ตัวแบบการจองเกินแบบเชิงเส้นซึ่งผิด

สมมุติฐานทางสถิติที่ส่งผลกระทบททำให้ค่าคาดหมายค่าใช้จ่ายจากการจองเกินนั้นสูงกว่าการใช้ตัวแบบเทียบสมรรถนะอยู่ประมาณร้อยละ 2 ถึง 27

แม้ว่าตัวแบบเชิงเส้นจะคิดสมมุติฐานทางสถิติจากผู้จองมาแสดงตนด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากันและเป็นอิสระต่อกัน อย่างไรก็ตามการทำงานของตัวแบบเชิงเส้นนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะการแจกแจงของอัตราการมาแสดงตน กล่าวคือตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตราการมาแสดงตนแจกแจงแบบเบต้ามาตรฐานนั้นมีประสิทธิภาพดีที่สุดหรือมีความแกร่งที่สุด เนื่องจากทุกแผนการทดลองมีค่าคาดหมายค่าใช้จ่ายใกล้เคียงกับตัวแบบเทียบสมรรถนะมากที่สุดและส่วนใหญ่จะมีค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานที่ต่ำกว่าการแจกแจงอื่นด้วย การแจกแจงแบบเบต้ามาตรฐานค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่มอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ซึ่งตรงตามลักษณะของอัตราการมาแสดงตนซึ่งทำให้ตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตราการมาแสดงตนแจกแจงเบต้ามาตรฐานนั้นมีความแม่นยำ

ทั้งนี้ประสิทธิภาพการทำงานของตัวแบบการจองเกินแบบเชิงเส้นยังขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ ผู้วิจัยทำการปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ทั้งสองปัจจัย การปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ในส่วนของความน่าจะเป็นในการมาแสดงตนพบว่าเมื่อค่าความน่าจะเป็นที่จะมาแสดงตนลดลง ร้อยละความแตกต่างของค่าคาดหมายค่าใช้จ่ายของตัวแบบเชิงเส้นกับตัวแบบเทียบสมรรถนะจะมากขึ้น นั่นแสดงให้เห็นว่าความแม่นยำในการหาระดับการจองเกินของตัวแบบเชิงเส้นจะลดลงเมื่อค่าความน่าจะเป็นที่จะมาแสดงตนลดลง และสำหรับการปรับเปลี่ยนค่าใช้จ่ายจากการจองเกินพบว่าตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตราการมาแสดงตนแจกแจงแบบเชิงกำหนดจะมีประสิทธิภาพการทำงานใกล้เคียงกับตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตราการมาแสดงตนแจกแจงแบบปกติเมื่อค่าใช้จ่ายในกรณีที่มีความจุเหลือเท่ากับค่าใช้จ่ายในกรณีที่ผู้จองมาแสดงตนเกินความจุ ( $a_s = a_o$ ) แต่หากค่าใช้จ่ายในกรณีที่มีความจุเหลือไม่เท่ากับค่าใช้จ่ายกรณีที่ผู้จองมาแสดงตนเกินความจุ ( $a_s \neq a_o$ ) แล้วตัวแบบเชิงเส้นที่มีอัตราการมาแสดงตนแจกแจงแบบปกติจะมีประสิทธิภาพการทำงานที่ดีกว่า นั่นคือให้ค่าคาดหมายค่าใช้จ่ายที่ต่ำกว่านั่นเอง

#### 4.2 ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยในอนาคตสามารถขยายต่อจากงานวิจัยนี้หลายประเด็น เช่น งานวิจัยนี้กำหนดให้ความจุบนเครื่องบินคงที่ งานวิจัยในอนาคตอาจกำหนดให้ความจุของเครื่องบินเป็นตัวแปรสุ่มเช่นเดียวกับงานวิจัยของ Kasilingam (1997) ประเด็นของความแกร่งของตัวแบบเชิงเส้น กล่าวคือ งานวิจัยนี้สรุปได้ว่าอัตราการมาแสดงตนของตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจงแบบเบต้ามาตรฐานนั้นมีประสิทธิภาพ

ที่สุด งานวิจัยในอนาคตอาจจะพิจารณาการแจกแจงแบบอื่น หรืออาจมุ่งพิจารณาไปที่เทคนิคการพยากรณ์แบบอื่นนอกจากวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล เป็นต้น

#### 5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณท่าน อ.ดร. กาญจน์ภา อมรัชกุล สำหรับแนวคิดในการสร้างงานวิจัยชิ้นนี้ ตลอดจนการควบคุมดูแล และให้คำปรึกษาให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

#### เอกสารอ้างอิง

- [1] J. Bailey, "Bump Fliers and No Plan B", The New York Times, May 30, 2007.
- [2] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty, "Nonlinear Programming: Theory and Algorithms", John Wiley & Sons, Inc., New York, 2006.
- [3] W. L. Cooper, T. Homen-de-Mello, and A. J. Kleywegt, "Models of the Spiral-Down Effect in Revenue Management", Operations Research, May 968-987, 2006.
- [4] J.A. Hausman, "Specification Test in Econometrics" Econometrica, November 1257-1271, 1978.
- [5] R.G. Kasilingam, "An Economic Model for Air Cargo Overbooking under Stochastic capacity", Computers & Industrial Engineering, January 221-226, 1997.
- [6] S. Luo, M. Cakanyildirim, and R. G. Kasilingam, "Two-Dimensional Cargo Overbooking Models", European Journal of Operational Research, 197(3) 862-883, 2009.
- [7] S. Makridakos, S. C. Wheelwright, and R. J. Hyndman, "Forecasting: Methods and Applications", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
- [8] A. Popescu, P. Keskinocak, E. Johnson, M. LaDue, and R. G. Kasilingam, "Estimating Air- Cargo Overbooking Based on a Discrete Show-Up-Rate Distribution", Interfaces, May 248-258, 2006.
- [9] K.T. Talluri and G.J. van Ryzin, "Theory and Practice of Revenue Management", Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 2004.
- [10] H.R. Thomson, "Statistic Problems in Airline Reservation Control", Operations Research Quarterly, September 167-185, 1961.

## ประวัติผู้เขียนบทความ



ปริญญาณ แซ่หลี่ม จบการศึกษาจากภาควิชา  
คณิตศาสตร์และสถิติ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์  
ในปี 2549 (2 nd class honors) ต่อจากนั้นได้  
ทำงานในฝ่ายวิจัยธุรกิจ ธนาคารกรุงไทย และ

ในปี 2551 ได้รับทุนการศึกษาต่อของสถาบันบัณฑิตพัฒนบริหาร-  
ศาสตร์ และทำวิทยานิพนธ์ด้านการจัดการรายได้ โดยมี  
อ.ดร. กาญจน์ภา อมรัชกุล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์